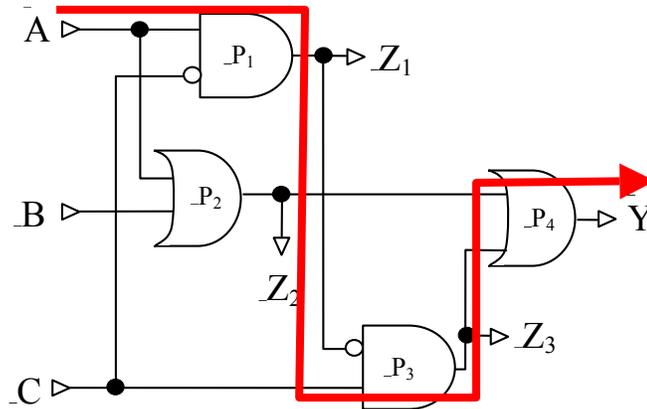


## Altri esercizi di sintesi - Soluzioni

1. Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Cammino critico = 3.

A	B	C	$\sim C$	$Z_1=A\sim C$	$Z_2=A+B$	$\sim Z_1$	$Z_3=\sim Z_1C$	$Y=Z_2+Z_3$
0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	1	1	1	1

$A+B+C$

Implicante **B**  
Tutte le  
configurazioni  
di **A** e **C** per  
**B=1** sono  
uguali ad **1**

**Nota:** Esaminando la colonna risultato si ricava che la funzione minima è il max-term corrispondente l'unico 0:  $A+B+C$ . Analogamente esaminando la sequenza di 1 si possono individuare alcuni implicanti. Ad esempio, è possibile vedere che la funzione ammette l'implicante **B** poiché la funzione data per  $B=1$  è uguale ad 1 indifferentemente da **A** e **C**. Un Analogo discorso si potrebbe fare per gli implicanti **A** e **C** (vedi mappe di Karnaugh).

**Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:**

Nel ricavare la formula dal circuito logico è comodo ricostruire la formula partendo dalle uscite e risalendo poi il circuito fino agli ingressi.

**NOTA:** Per ogni passaggio di semplificazione è indicato il punto di lavoro con un'evidenziazione gialla e il risultato ottenuto con una zona sottolineata nella riga successiva.

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_4 \\
 &= (Z_2 + Z_3) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_2 \text{ e } P_3 \\
 &= (A+B + \sim Z_1 C) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_2 \text{ e } P_3 \\
 &= (A+B + \sim(A\sim C)C) && \leftarrow 8b \text{ De Morgan: } \sim(xy) = \sim x + \sim y \\
 &= (A+B + (\sim A + \sim \sim C)C) && \leftarrow 0 \text{ Doppia inversione: } \sim(\sim x) = x \\
 &= (A+B + (\sim A + C)C) && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= (A+B + \sim AC + CC) && \leftarrow 3a \text{ Idempotenza: } xx = x \\
 &= (A+B + \sim AC + C) && \leftarrow 6b \text{ Assorbimento: } xy + x = x \\
 &= (A+B + C) && \leftarrow 6b \text{ Assorbimento: } xy + x = x
 \end{aligned}$$

**Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:**

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale 1 corrisponde un mintermine.

$$Y = \sim A \sim B C + \sim A B \sim C + \sim A B C + A \sim B \sim C + A \sim B C + A B \sim C + A B C$$

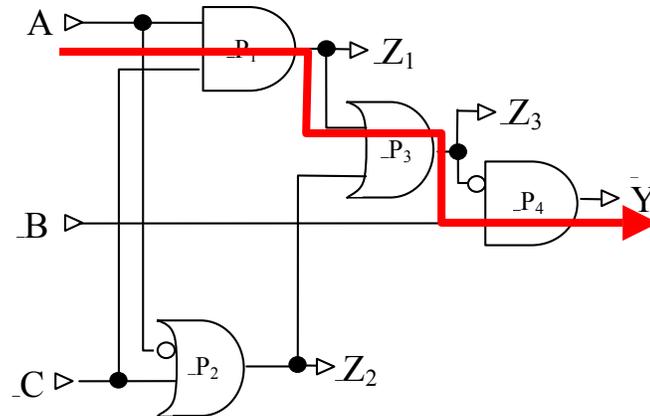
Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

Questo corrisponde ad individuare di volta in volta degli *implicant* (y) sempre più piccoli della funzione data

$$x y + \sim x y = (x + \sim x) y = 1 y = y$$

$$\begin{aligned}
 Y &= \sim A \sim B C + \sim A B + A \sim B + A B \\
 Y &= \sim A \sim B C + \sim A B + A && \leftarrow x + \sim x y = x + y: \quad x=A, y=B \\
 Y &= \sim A \sim B C + B + A && \leftarrow x + \sim x y = x + y: \quad x=A, y=(\sim B C) \\
 Y &= \sim B C + B + A && \leftarrow x + \sim x y = x + y: \quad x=A, y=(\sim B C) \\
 Y &= C + B + A && \leftarrow x + \sim x y = x + y: \quad x=A, y=(\sim B C) \\
 Y &= A + B + C
 \end{aligned}$$

2. Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Cammino critico = 3.

A	B	C	$Z_1=AC$	$\sim A$	$Z_2=\sim A+C$	$Z_3=Z_1+Z_2$	$\sim Z_3$	$Y=B\sim Z_3$
0	0	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	1	0	1	1	0	0

$AB\sim C$

**Nota:** Esaminando la colonna risultato si ricava che la funzione minima è il min-term corrispondente l'unico 1:  $AB\sim C$ . In aggiunta si nota pure che la sotto funzione  $Z_2$  copre totalmente  $Z_1$ . Per la proprietà di assorbimento, durante la semplificazione, dovrebbe essere possibile semplificarla.

**Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:**

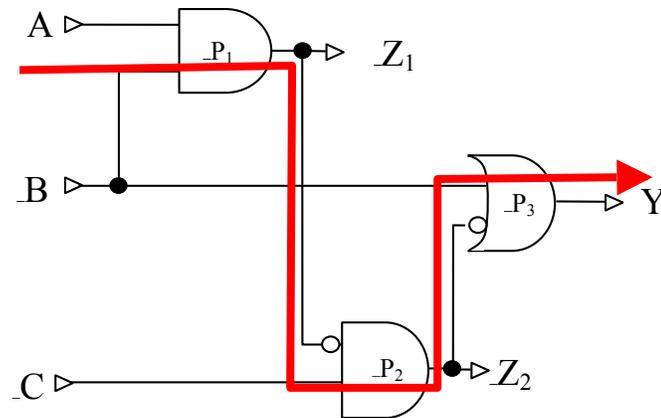
$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_4 \\
 &= (B \sim Z_3) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_3 \\
 &= (B \sim (Z_1 + Z_2)) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1 \text{ e } P_2 \\
 &= B \sim (\underline{AC} + \sim A + \underline{C}) && \leftarrow 6b \text{ Assorbimento: } xy + x = x \\
 &= B \sim (\underline{\sim A + C}) && \leftarrow 8a \text{ De Morgan: } \sim(x + y) = \sim x \sim y \\
 &= B \sim \underline{\sim A} \sim C && \leftarrow 0 \text{ Doppia inversione: } \sim(\sim x) = x \\
 &= B \underline{A} \sim C \\
 &= AB \sim C
 \end{aligned}$$

**Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:**

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale **1** corrisponde un mintermine. In questo caso il calcolo è triviale:

$$Y = AB \sim C$$

3. Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Cammino critico = 3.

A	B	C	$Z_1=AB$	$\sim Z_1$	$Z_2=\sim Z_1 C$	$\sim Z_2$	$Y=B + \sim Z_2$
0	0	0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

$B + \sim C$

**Nota:** Esaminando la colonna risultato si ricava che la parte superiore è uguale alla parte inferiore: ciò significa che A non determina l'uscita. Esaminando la configurazione di una delle due metà si deduce che la funzione sintetizzata dal circuito è un OR ed in particolare  $B + \sim C$ .

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_3 \\
 &= (B + \sim Z_2) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_2 \\
 &= (B + \sim(\sim Z_1 C)) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1 \\
 &= (B + \sim(\sim(AB) C)) && \leftarrow \text{8a De Morgan: } \sim(x + y) = \sim x \sim y \\
 &= B + \sim(\sim A + \sim B) C) && \leftarrow \text{7a Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= B + \sim(\sim AC + \sim BC) && \leftarrow \text{8a De Morgan: } \sim(x + y) = \sim x \sim y \\
 &= B + (\sim(\sim AC) \sim(\sim BC)) && \leftarrow \text{8b De Morgan: } \sim(xy) = \sim x + \sim y \\
 &= B + ((\sim\sim A + \sim C) (\sim\sim B + \sim C)) && \leftarrow \text{0 Doppia inversione: } \sim(\sim x) = x \\
 &= B + ((A + \sim C) (B + \sim C)) && \leftarrow \text{7a Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= B + ((A + \sim C) B + (A + \sim C) \sim C) && \leftarrow \text{7a Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= B + (AB + \sim CB + (A \sim C + \sim C \sim C)) && \leftarrow \text{3a Idempotenza: } xx = x \\
 &= B + AB + \sim CB + A \sim C + \sim C && \leftarrow \text{6b Assorbimento: } xy + x = x \\
 &= B + \sim C
 \end{aligned}$$

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale 1 corrisponde un mintermine. In questo caso il calcolo è triviale:

$$Y = \sim A \sim B \sim C + \sim AB \sim C + \sim ABC + A \sim B \sim C + AB \sim C + ABC$$

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

$$xy + \sim xy = (x + \sim x)y = Iy = y$$

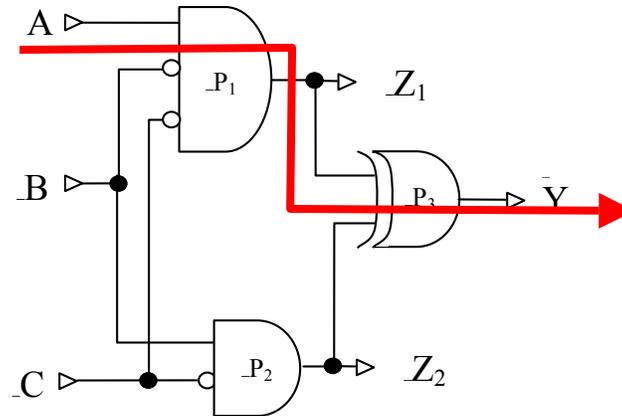
$$Y = \sim B \sim C + \sim AB + AB$$

$$Y = \sim B \sim C + B \quad \leftarrow x + \sim xy = x + y: \quad x=A, y=B$$

$$Y = \sim C + B$$

$$Y = B + \sim C$$

4. Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Cammino critico = 3 (la porta AND a 3 ingressi richiede due porte a due ingressi in cascata).

Nessuna configurazione 1 XOR 1 : la XOR è equivalente a una porta OR

A	B	C	$\sim B$	$\sim C$	$Z_1 = A \sim B \sim C$	$Z_2 = B \sim C$	$Y = Z_1 \oplus Z_2$
0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0	0

$A \sim B \sim C$

$B \sim C$

**Nota:** Esaminando la colonna risultato si ricava che sono presenti due implicanti:  $A \sim B \sim C$  e  $B \sim C$ . In aggiunta si può vedere che la porta XOR non viene sfruttata come XOR da cui può essere sostituita all'occorrenza con una porta OR, senza cambiare la funzione data.

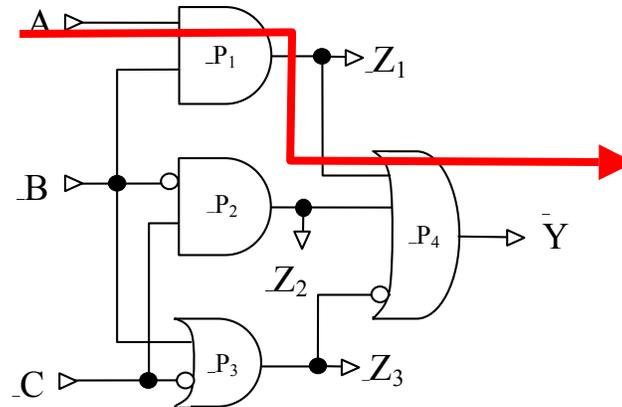
Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_3 \\
 &= (Z_1 \oplus Z_2) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1 \text{ e } P_2 \\
 &= ((A \sim B \sim C) \oplus (B \sim C)) && \leftarrow \text{Sviluppo la porta XOR} \\
 &= (\sim(A \sim B \sim C)(B \sim C) + (A \sim B \sim C)\sim(B \sim C)) && \leftarrow 0 \text{ Doppia inversione: } \sim(\sim x) = x \\
 &= (\sim A + \sim B + C)(B \sim C) + (A \sim B \sim C)(\sim B + \sim C) && \\
 &&& \leftarrow 8a \text{ De Morgan: } \sim(xy) = \sim x + \sim y \\
 &= (\sim A + B + C)(B \sim C) + (A \sim B \sim C)(\sim B + C) && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= \sim A(B \sim C) + B(B \sim C) + C(B \sim C) + (A \sim B \sim C)\sim B + (A \sim B \sim C)C && \\
 &&& \leftarrow 3a \text{ Idempotenza: } xx = x \\
 &= \sim AB \sim C + B \sim C + CB \sim C + A \sim B \sim C + A \sim B \sim CC && \\
 &&& \leftarrow 4a \text{ Inverso: } xx = 0 \\
 &&& \leftarrow 2a \text{ Elemento nullo: } 0x = 0 \\
 &= \sim AB \sim C + B \sim C + A \sim B \sim C && \leftarrow 6b \text{ Assorbimento: } xy + x = x \\
 &= B \sim C + A \sim B \sim C && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= (B + A \sim B) \sim C && \leftarrow x + \sim xy = x + y: \quad x=A, y=B \\
 &= (B + A) \sim C
 \end{aligned}$$

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

$$\begin{aligned}
 Y &= \sim AB \sim C + A \sim B \sim C + AB \sim C && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 Y &= (\sim AB + A \sim B + AB) \sim C && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 Y &= (\sim AB + A) \sim C && \leftarrow x + \sim xy = x + y: \quad x=A, y=B \\
 Y &= (A+B) \sim C
 \end{aligned}$$

5. Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Cammino critico = 4 (la porta OR a 3 ingressi richiede due porte a due ingressi in cascata).

A	B	C	$\sim B$	$\sim C$	$Z_1 = AB$	$Z_2 = \sim BC$	$Z_3 = B + \sim C$	$\sim Z_3$	$Y = Z_1 + Z_2 + \sim Z_3$
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

**Nota:** Esaminando la colonna risultato si ricava che sono presenti due implicanti:  $AB$  e  $\sim BC$ .

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_4 \\
 &= (Z_1 + Z_2 + \sim Z_3) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1 \text{ e } P_2 \text{ e } P_3 \\
 &= (AB + \sim BC + \sim (B + \sim C)) && \leftarrow \text{8a De Morgan: } \sim(x+y) = \sim x \sim y \\
 &= (AB + \sim BC + (\sim B \sim \sim C)) && \leftarrow \text{0 Doppia inversione: } \sim(\sim x) = x \\
 &= AB + \sim BC + \sim BC && \leftarrow \text{3a Idempotenza: } xx = x \\
 &= AB + \sim BC
 \end{aligned}$$

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

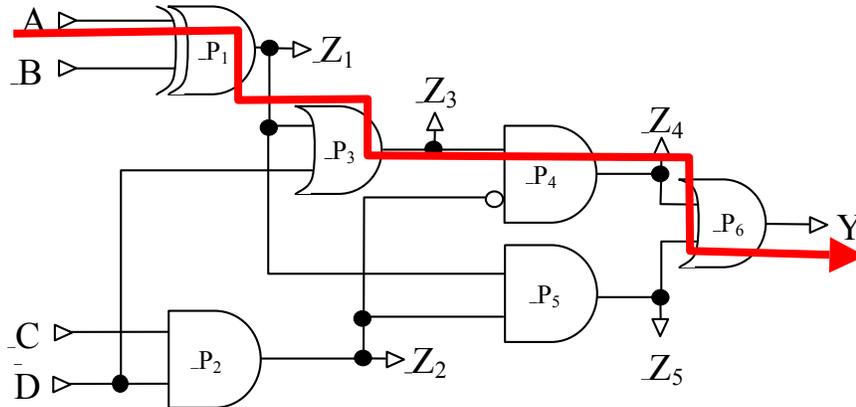
$$Y = \sim A \sim BC + A \sim BC + AB \sim C + ABC \quad \leftarrow \text{7a Distributiva: } (x+y)z = xz + yz$$

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

$$xy + \sim x y = (x + \sim x) y = 1 y = y$$

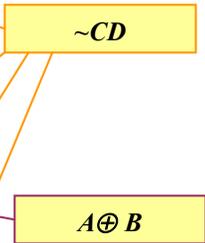
$$Y = \sim BC + AB$$

6. Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Cammino critico = 4

A	B	C	D	$Z_1 = A \oplus B$	$Z_2 = CD$	$\sim Z_2$	$Z_3 = Z_1 + D$	$Z_4 = Z_3 \sim Z_2$	$Z_5 = Z_1 Z_2$	$Y = Z_4 + Z_5$
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0



**Nota:** Esaminando la colonna risultato si ricava che è presente un implicante:  $\sim CD$ . Inoltre la parte centrale della tabella è la funzione  $A \text{ XOR } B$ . Ne segue che una possibile formula per la tabella data potrebbe essere  $Y = \sim CD + (A \oplus B)$

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_6 \\
 &= (Z_4 + Z_5) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_4 \text{ e } P_5 \\
 &= ((Z_3 \sim Z_2) + (Z_1 Z_2)) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1, P_2 \text{ e } P_3 \\
 &= (((Z_1 + D) \sim (CD)) + ((A \oplus B)(CD))) && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_1 \\
 &= (((A \oplus B) + D) \sim (CD)) + ((A \oplus B)(CD)) && \leftarrow 8a \text{ De Morgan: } \sim(x+y) = \sim x \sim y \\
 &= (((A \oplus B) + D)(\sim C + \sim D)) + (A \oplus B)CD && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= ((A \oplus B) + D) \sim C + ((A \oplus B) + D) \sim D + (A \oplus B)CD && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= (A \oplus B) \sim C + D \sim C + (A \oplus B) \sim D + D \sim D + (A \oplus B)CD && \\
 &&& \leftarrow 4a \text{ Inverso: } xx = 0 \\
 &= (A \oplus B) \sim C + \sim CD + (A \oplus B) \sim D + (A \oplus B)CD && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= (A \oplus B)(\sim C + \sim D + CD) + \sim CD && \leftarrow x + \sim xy = x + y: x = \sim D, y = C \\
 &= (A \oplus B)(\sim C + \sim D + C) + \sim CD && \leftarrow 4b \text{ Inverso: } x + \sim x = 1 \\
 &= (A \oplus B)(1 + \sim D) + \sim CD && \leftarrow 2b \text{ Elemento nullo: } 1 + x = 1 \\
 &= (A \oplus B) + \sim CD
 \end{aligned}$$

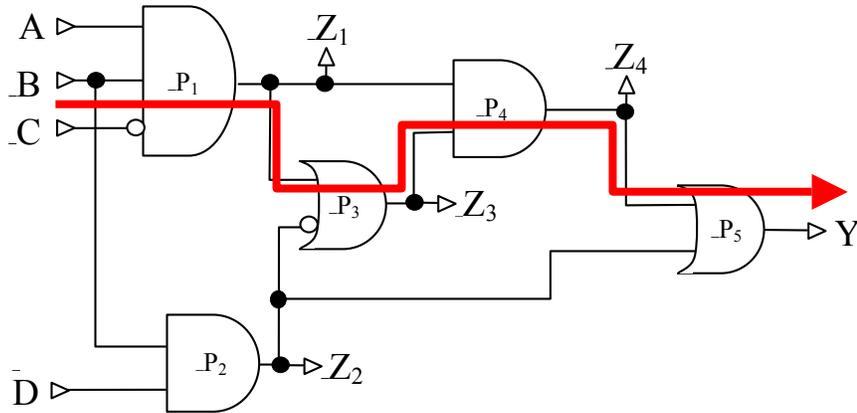
Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

$$\begin{aligned}
 Y &= \sim A \sim B \sim C D + \sim A B \sim C \sim D + \sim A B \sim C D + \sim A B C \sim D + \sim A B C D + A \sim B \sim C \sim D + \\
 &A \sim B \sim C D + A \sim B C \sim D + A \sim B C D + A B \sim C D && \leftarrow 3a \text{ Idempotenza: } xx = x \\
 &= \sim A \sim B \sim C D + \sim A B \sim C \sim D + \sim A B \sim C D + \sim A B \sim C D + \sim A B C \sim D + \sim A B C D + \\
 &A \sim B \sim C \sim D + A \sim B \sim C D + A \sim B \sim C D + A \sim B C \sim D + A \sim B C D + A B \sim C D
 \end{aligned}$$

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

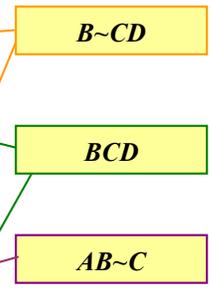
$$\begin{aligned}
 &xy + \sim xy = (x + \sim x)y = 1y = y \\
 &= \sim A \sim B \sim C D + \sim A B \sim C \sim D + \sim A B \sim C D + \sim A B \sim C D + \sim A B C \sim D + \sim A B C D \\
 &+ A \sim B \sim C \sim D + A \sim B \sim C D + A \sim B \sim C D + A \sim B C \sim D + A \sim B C D + A B \sim C D \\
 &= \sim C D + \sim A B + A \sim B \\
 &= \sim C D + (A \oplus B)
 \end{aligned}$$

7. Ricavare il cammino critico, la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Cammino critico = 5 (la porta AND a 3 ingressi richiede due porte a due ingressi in cascata)

A	B	C	D	$\sim C$	$Z_1 = AB\sim C$	$Z_2 = BD$	$\sim Z_2$	$Z_3 = Z_1 + \sim Z_2$	$Z_4 = Z_1 Z_2$	$Y = Z_4 + Z_2$
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1



**Nota:** Esaminando la colonna risultato si ricava che sono presenti gli implicanti:  $B\sim CD$ ,  $BCD$  e  $AB\sim C$ . Inoltre  $Z_4$  replica  $Z_1$  quindi tutta la circuiteria di  $Z_4$  può essere semplificata. Una possibile formula per la tabella data potrebbe essere:

$$Y = B\sim CD + BCD + AB\sim C = BD + AB\sim C$$

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_5 \\
 &= (Z_4 + Z_2) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_4 \text{ e } P_2 \\
 &= ((Z_1 Z_3) + (BD)) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1 \text{ e } P_3 \\
 &= (((\overline{AB \sim C}) (Z_1 + \sim Z_2)) + (BD)) && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_1 \text{ e } P_2 \\
 &= ((\overline{AB \sim C}) (\overline{AB \sim C} + \sim(BD))) + BD && \leftarrow 8a \text{ De Morgan: } \sim(x+y) = \sim x \sim y \\
 &= ((\overline{AB \sim C}) (\overline{AB \sim C} + \sim B + \sim D)) + BD && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= \overline{AB \sim C} (\overline{AB \sim C}) + (\overline{AB \sim C}) \sim B + (\overline{AB \sim C}) \sim D + BD && \\
 &&& \leftarrow 3a \text{ Idempotenza: } xx = x \\
 &= \overline{AB \sim C} + (\overline{AB \sim C}) \sim B + (\overline{AB \sim C}) \sim D + BD && \leftarrow 6b \text{ Assorbimento: } xy + x = x \\
 &= \overline{AB \sim C} + (\overline{AB \sim C}) \sim D + BD && \leftarrow 6b \text{ Assorbimento: } xy + x = x \\
 &= \overline{AB \sim C} + BD && \leftarrow 7a \text{ Distributiva: } (x+y)z = xz + yz \\
 &= \underline{B(A \sim C + D)}
 \end{aligned}$$

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e passando per la forma SOP:

$$\begin{aligned}
 Y &= \sim AB \sim CD + \sim ABCD + AB \sim C \sim D + \overline{AB \sim CD} + ABCD \\
 &&& \leftarrow 3a \text{ Idempotenza: } xx = x \\
 &= \sim AB \sim CD + \sim ABCD + AB \sim C \sim D + \overline{AB \sim CD} + \overline{AB \sim CD} + ABCD
 \end{aligned}$$

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

$$\begin{aligned}
 &xy + \sim xy = (x + \sim x)y = 1y = y \\
 &= \underline{B \sim CD} + \underline{BCD} + AB \sim C \\
 &= \underline{BD} + AB \sim C
 \end{aligned}$$

8. Calcolare una forma algebrica semplificata della seguente tabella:

A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

La forma SOP è composta da 6 min-termini sintetizzabili con 3 porte AND a due ingressi per ogni min-termini e 5 porte OR a due ingressi per le somme, per un totale di  $3*6+5=23$  porte logiche.

Dividiamo la tabella in quattro quadranti di quattro righe ognuno. Si può notare che il primo e l'ultimo quadrante la funzione hanno valori di verità uguali alla funzione:

$$(C \text{ xor } \sim D)$$

In questi quadranti la funzione  $(A \text{ xor } \sim B)$  vale 1 quindi gli 1 di questi quadranti possono essere coperti dalla funzione:

$$(A \text{ xor } \sim B) (C \text{ xor } \sim D)$$

Nel secondo e terzo quadrante la tabella di verità assomiglia alla tabella di verità della funzione **CD** a meno della posizione. Sempre in questi quadranti la funzione

$$\sim(A \text{ xor } \sim B)$$

vale 1, quindi gli 1 della funzione originaria nel secondo e terzo quadrante possono essere coperti dalla funzione

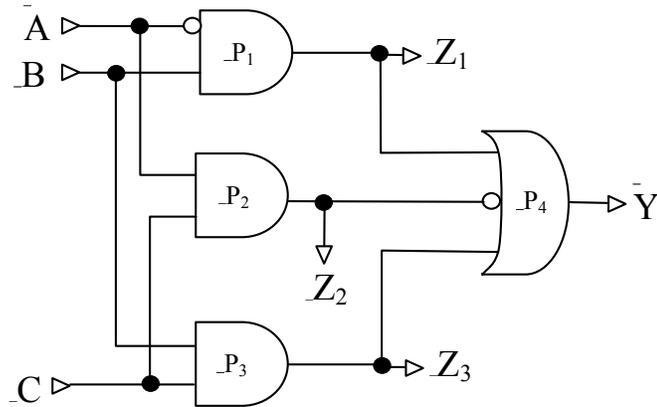
$$\sim(A \text{ xor } \sim B) (A \text{ xor } C) (\sim A \text{ xor } D)$$

Unendo i risultati:

$$(C \text{ xor } \sim D)(A \text{ xor } \sim B) + \sim(A \text{ xor } \sim B) (A \text{ xor } C) (\sim A \text{ xor } D)$$

che può essere costruita con 8 porte (3 porte AND, 1 porta OR, 4 porte XOR, una porta xor è usata due volte).

9. Ricavare la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



A	B	C	$\sim A$	$Z_1 = \sim AB$	$Z_2 = AC$	$Z_3 = BC$	$\sim Z_2$	$Y = Z_1 + \sim Z_2 + Z_3$
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1	0	1

Calcoliamo una forma algebrica semplificata partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_4 \\
 &= (Z_1 + \sim Z_2 + Z_3) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1, P_2 \text{ e } P_3 \\
 &= (\sim AB + \sim(AC) + BC) && \leftarrow 9a \text{ De Morgan: } \sim(xy) = \sim x + \sim y \\
 &= (\sim AB + \sim A + \sim C + BC) && \leftarrow 8b \text{ Assorbimento: } xy + \sim x = \sim x \text{ (} x = \sim A, y = B \text{)} \\
 &= (\sim A + \sim C + BC)
 \end{aligned}$$

Vale la seguente proprietà:  $x + \sim xy = x + y$

Dim:	$x + \sim xy$	$= (x + xy) + \sim xy$	$\leftarrow 8b$
		$= x + (xy + \sim xy)$	$\leftarrow 6b$
		$= x + y(x + \sim x)$	$\leftarrow 7a$
		$= x + yI$	$\leftarrow 4b$
		$= x + y$	$\leftarrow 1a$

**NOTA:** Per ogni passaggio di semplificazione è indicato il punto di lavoro con un'evidenziazione gialla e il risultato ottenuto con una zona sottolineata nella riga successiva.

Questo non è altro che l'unico maxtermine della seconda forma canonica.

$$= (\sim A + \sim C + BC) \quad \leftarrow \text{Applico: } x + \sim xy = x + y$$

$$\rightarrow = (\sim A + \sim C + B) \quad \leftarrow 8b \text{ De Morgan}$$

$$= \sim (A \sim BC)$$

Questo non è altro che l'unico mintermine della prima forma canonica della funzione ottenuta negando quella data.

### Calcoliamo lo stesso risultato partendo dalla tabella la forma SOP e semplificando:

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale 1 corrisponde un mintermine.

$$Y = \sim A \sim B \sim C + \sim A \sim BC + \sim AB \sim C + \sim ABC + A \sim B \sim C + AB \sim C + ABC$$

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

Questo corrisponde ad individuare di volta in volta degli *implicants* (y) sempre più piccoli della funzione data

$$x y + \sim x y = (x + \sim x) y = I y = y$$

$$Y = \sim A \sim B \sim C + \sim A \sim BC + \sim AB \sim C + \sim ABC + A \sim B \sim C + AB \sim C + ABC$$

$$Y = \sim A \sim B + \sim AB \sim C + \sim ABC + A \sim B \sim C + AB \sim C + ABC$$

$$Y = \sim A \sim B + \sim AB + A \sim B \sim C + AB \sim C + ABC$$

$$Y = \sim A \sim B + \sim AB + \underline{A \sim C} + ABC$$

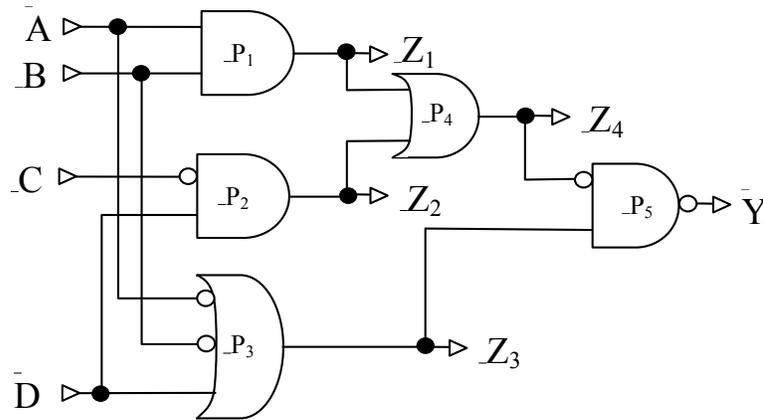
$$Y = \sim A + \underline{A \sim C + ABC} \quad \leftarrow 6b \text{ Associativa: } A(w)+A(z) = A[(w)+(z)]$$

$$Y = \sim A + \underline{A(\sim C + BC)} \quad \leftarrow x + \sim xy = x + y: \quad x = \sim C, \sim x = \sim(\sim C) = C$$

$$Y = \underline{\sim A + A(\sim C + B)} \quad \leftarrow x + \sim xy = x + y: \quad x = \sim A, y = (\sim C + B)$$

$$Y = \underline{\sim A + \sim C + B} = \sim (A \sim BC) \quad \leftarrow \text{Vedi sopra}$$

10. Ricavare la forma tabellare, la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



Forma tabellare:

A	B	C	D	$\sim A$	$\sim B$	$\sim C$	$Z_1 = AB$	$Z_2 = \sim CD$	$Z_3 = \sim A \sim B D$	$Z_4 = Z_1 + Z_2$	$\sim Z_4$	$Z_3 \sim Z_4$	Y
0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0
1	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	0	1
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	1

Nota: dalla tabella si possono ricavare suggerimenti sul come semplificare la formula data.

Ex: il gruppo di 1 corrispondenti alle configurazioni per cui A e B valgono 1 suggerisce di cercare di derivare l'implicante AB durante la semplificazione della SOP.

Stesso discorso vale per gli 1 presenti quando CD = 01 che suggerisce di cercare di derivare l'implicante  $\sim CD$ .

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= (\overline{Z_4 + Z_3}) = (\overline{Z_1 + Z_2}) (\overline{A+B+D}) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte del circuito} \\
 &= (\overline{AB + \overline{CD}}) (\overline{A+B+D}) && \leftarrow 9a \text{ De Morgan} \\
 &= (\overline{AB + \overline{CD}}) + (\overline{A+B+D}) && \leftarrow 0 \text{ Doppia Negazione} \\
 &= (\overline{AB + \overline{CD}}) + (\overline{A+B+D}) && \leftarrow 9b \text{ De Morgan} \\
 &= (AB + \overline{CD}) + (\overline{A+B+D}) && \leftarrow 9b \text{ De Morgan} \\
 &= (AB + \overline{CD}) + (\overline{A} \overline{B} \overline{D}) && \leftarrow 0 \text{ Doppia Negazione} \\
 &= (AB + \overline{CD} + \overline{ABD}) && \leftarrow 5b \text{ Commutativa} \\
 &= \overline{AB} + \overline{ABD} + \overline{CD} && \leftarrow 8b \text{ Assorbimento} \\
 &= \overline{AB} + \overline{CD} && \leftarrow \text{Nota: Questa è la somma dei due implicanti individuati in tabella!!! Ci sono solo loro perché insieme coprono tutti gli 1 della tabella (vedi mappe di karnaugh)}
 \end{aligned}$$

Quando compaiono diversi livelli di negazione conviene applicare ripetutamente Demorgan e Doppia Negazione

Calcoliamo la forma canonica partendo dalla tabella e semplifichiamo:

$$Y = \sim A \sim B \sim CD + \sim AB \sim CD + A \sim B \sim CD + AB \sim C \sim D + AB \sim CD + ABC \sim D + ABCD$$

Semplifichiamo applicando varie volte:  $x y + \sim x y = y$

$$\begin{aligned}
 Y &= \sim A \sim B \sim CD + \sim AB \sim CD + A \sim B \sim CD + AB \sim C \sim D + AB \sim CD + \overline{ABC \sim D} + \overline{ABCD} \\
 &= \sim A \sim B \sim CD + \sim AB \sim CD + A \sim B \sim CD + \overline{AB \sim C \sim D} + \overline{AB \sim CD} + \overline{ABC} \\
 &= \sim A \sim B \sim CD + \sim AB \sim CD + A \sim B \sim CD + \overline{AB \sim C} + \overline{ABC} \\
 &= \overline{\sim A \sim B \sim CD} + \sim AB \sim CD + \overline{A \sim B \sim CD} + \overline{AB} \\
 &= \overline{\sim B \sim CD} + \sim AB \sim CD + \overline{AB}
 \end{aligned}$$

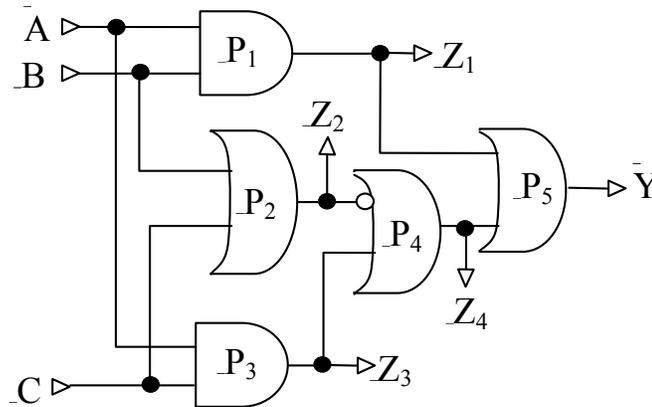
Nello sviluppo e semplificazione tramite le SOP conviene come primo passaggio individuare degli implicanti della funzione data. Questo si può ottenere individuando iterativamente coppie di termini uguali eccetto che per un letterale che compare sia negato che non negato.

Applico sul termine  $\overline{AB}$  la regola di 8b,  $x = x + x y$ ,

in modo da creare un termine  $\overline{AB} \sim CD$  da utilizzare nella semplificazione successiva:

$$\begin{aligned}
 &= \overline{\sim B \sim CD} + \sim AB \sim CD + \overline{AB} \\
 &= \overline{\sim B \sim CD} + \overline{\sim AB \sim CD} + \overline{AB} + \overline{AB \sim CD} && \leftarrow 7a \text{ e } 4b: x y + \sim x y = y \\
 &= \overline{\sim B \sim CD} + \overline{B \sim CD} + \overline{AB} && \leftarrow \text{idem} \\
 &= \sim CD + \overline{AB} && \leftarrow 5b \text{ Commutativa} \\
 &= \overline{AB} + \sim CD
 \end{aligned}$$

11. Ricavare la forma tabellare , la prima forma canonica e la forma algebrica del seguente circuito semplificando dove possibile.



A	B	C	$Z_1=AB$	$Z_2=B+C$	$Z_3=AC$	$\sim Z_2$	$Z_4=\sim Z_2+Z_3$	$Y=Z_1+Z_4$
0	0	0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	0	1	1

Calcoliamo la forma algebrica partendo dal circuito logico:

$$\begin{aligned}
 Y &= && \leftarrow \text{Sviluppo la porta } P_5 \\
 &= (Z_1 + Z_4) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_1 \text{ e } P_4 \\
 &= (\underline{AB}) + (\underline{\sim Z_2 + Z_3}) && \leftarrow \text{Sviluppo le porte } P_2 \text{ e } P_3 \\
 &= AB + \underline{\sim(B+C)} + (AC) && \leftarrow 5b \text{ Commutativa: } x + y = y + x \\
 &= \underline{AB} + (\underline{AC}) + \underline{\sim(B+C)} && \leftarrow 7a \text{ Distributiva } zx + zy = z(x + y) \\
 &= \underline{A(B+C)} + \underline{\sim(B+C)} && \leftarrow \text{vedi sopra: } x + \sim xy = x + y \text{ ( } x = \sim(B+C), y = A \text{ )} \\
 &= \underline{A} + \underline{\sim(B+C)} && \leftarrow 9b \text{ De Morgan } \sim(x + y) = \sim x \sim y \\
 &= A + \underline{\sim B \sim C} && \leftarrow \text{Questi sono i due mintermini della prima forma canonica della funzione ottenuta.}
 \end{aligned}$$

**Calcoliamo la forma canonica SOP partendo dalla tabella e semplifichiamo:**

La prima forma canonica si ottiene sommando i mintermini della funzione risultato. Ad ogni combinazione degli ingressi per cui la funzione vale 1 corrisponde un mintermine.

$$Y = \sim A \sim B \sim C + A \sim B \sim C + AB \sim C + A \sim BC + ABC$$

Questo corrisponde ad individuare di volta in volta degli *implicants* (*y*) sempre più piccoli della funzione data

Semplifichiamo applicando varie volte le regole 7a e 4b:

$$x y + \sim x y = (x + \sim x) y = 1 y = y$$

$$\begin{aligned} Y &= \sim A \sim B \sim C + \underline{A \sim B \sim C + AB \sim C} + \underline{A \sim BC + ABC} \\ &= \sim A \sim B \sim C + \underline{A \sim C + AC} \\ &= \sim A \sim B \sim C + \underline{A} \\ &= \underline{\sim A \sim B \sim C + A \sim B \sim C} + A \\ &= \underline{\sim B \sim C} + A \end{aligned}$$

**Calcoliamo la seconda forma canonica POS partendo dal risultato precedente:**

$$\begin{aligned} Y &= A + \sim B \sim C \\ &= A + A(\sim B + B) + A \sim C + \sim B \sim C \\ &= A + A \sim B + AB + A \sim C + \sim B \sim C \\ &= AA + A \sim B + BA + B \sim B + \sim CA + \sim C \sim B \\ &= A(A + \sim B) + B(A + \sim B) + \sim C(A + \sim B) \\ &= (A + B + \sim C)(A + \sim B) \\ &= (A + B + \sim C)(A + \sim B + C)(A + \sim B + \sim C) \end{aligned}$$